上海交通大学期中考试试卷(A卷)

(2016 至 2017 学年　第 2 学期)

班级号________________ 学号________________ 姓名 ___________

课程名称　　高等代数与解析几何 *(二)*　　　　　成绩 ___________

我承诺，我将严格遵守考试纪律。

题号	一	二	三	四	五	六
得分						
批阅人 (流水阅)						

记号

- 矩阵用大写字母记, 对应小写字母代表矩阵中的元素. 例如矩阵 A 中的第 (i,j) 个元素为 a_{ij}. A^T 和 A^* 分别代表矩阵 A 的转置和共轭转置.
- 向量一般理解为列向量, 用 X、Y 或 Z 等字母表示, 用对应的小写字母代表其分量. 例如向量 $X = (x_1, \cdots, x_n)^T$.
- $\langle\ ,\ \rangle$ 和 $\|\ \|$ 分别代表内积空间 ($\mathbb{R}^n$、$\mathbb{C}^n$、欧氏空间或酉空间) 上的内积和模长.

一、　[共 12 分] 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 是 $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 中的矩阵, 证明:

(a) [6 分] 如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是互相正交的 (列) 向量, 则

$$|\det(A)| = \prod_{i=1}^{n} \|\alpha_i\|\,;$$

(b) [6 分] 一般得, 有如下不等式成立 (这个不等式称为 Hadamard 不等式):

$$|\det(A)| \le \prod_{i=1}^{n} \|\alpha_i\|\,;$$

证明:

(a) 将列向量单位化后得正交矩阵: 令 D 为对角矩阵 $\mathrm{diag}(\|\alpha_1\|, \cdots, \|\alpha_n\|)$. 则矩阵 $B = AD^{-1}$ 的列向量为矩阵 A 中列向量的单位化, 特别的 B 是一个正交矩阵, 所以 $1 = |\det(B)| = |\det(A)|\left|\det(D)^{-1}\right|$. 命题得证.

(b) 一般的, 如果 A 不可逆, 则 $\det(A)$ 为 0, 公式显然成立. 假设 A 可逆, 则存在 QR 分解: $A = QR$ 其中 Q 是一个正交矩阵, R 是一个上三角矩阵. 显然 $\det(A) = \det(R) = \prod_{i=1}^{n} r_{ii}$. 另一方面, $\|\alpha_k\| = \left\|\sum_{i=1}^{k} r_{ik}\beta_i\right\| \ge |r_{kk}|$, 其中 $\{\beta_i\}$ 是 Q 中的列向量. 命题得证. □

二、　[共 10 分] 如果 $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 是一个可逆的反对称矩阵, 即 $A^T = -A$. 证明:

(a) [5 分] A^2 是一个负定的对称矩阵;

(b) [5 分] 特别得, A 的 (复的) 特征值都是虚数.

证明: $(A^2)^T = (A^T)^2 = (-A)^2 = A^2$, 所以 A^2 对称. 对任意 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 X, $X^TA^2X = (A^TX)^T(AX) = -(AX)^T(AX) \le 0$. 因为 A 可逆, 所以 $AX = 0$ 等价于 $X = 0$. 总之 A^2 是负定的.
下证 A 的特征值是虚数.
假设 $0 \neq Y$ 是 A 的一个特征向量, 特征值为 λ. 因为 A^2 是负定的, 所以 $0 > Y^*A^2Y = Y^*\lambda^2 Y = \lambda^2 Y^*Y$. 由于 $Y^*Y > 0$, 我们得到 $\lambda^2 < 0$, 即 λ 是纯虚数.
$Y^*A^2Y < 0$ 可以由此看出: 因为 A^2 负定, 存在可逆实矩阵 R 使得 $A^2 = -R^TR$. 所以 $Y^*A^2Y = -(RY)^*(RY) < 0$.

三、 [共 18 分] 设 V 为一个有限维欧氏空间, $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 为 V 中的两组向量.
令 $A := \big(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle\big)$ 为第 (i,j) 个元素为 $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ 的 m 阶方阵. 类似得定义 $B := \big(\langle \beta_i, \beta_j \rangle\big)$. 证明:

(a) [8 分] 令 $M := \mathrm{Span}\{\, \alpha_1, \cdots, \alpha_m \,\}$ 为由 $\{\, \alpha_i \,\}$ 张成的子空间, 则 M 的维数 $\dim(M)$ 等于 A 的秩 $\mathrm{rk}(A)$.

(b) [10 分] (Witt 定理) 假设矩阵 $A = B$. 证明存在一个正交变换 $\sigma \in \mathrm{O}(V)$, 使得

$$\sigma(\alpha_i) = \beta_i \qquad \text{对任意} \quad i = 1, \cdots, m \quad \text{成立}.$$

证明:

(a) 假设 $\dim M = r$, 取 M 中的一个正交基 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$. 则存在满秩矩阵 $R \in \mathrm{Mat}_{r\times m}$, 使得 $\alpha = \varepsilon R$. 于是 $A = R^TR$, 而且 A 的秩等于 r.

(b) 定义 $N = \mathrm{Span}\{\, \beta_1, \cdots, \beta_m \,\}$. $\dim N = \mathrm{rk}(B) = \mathrm{rk}(A) = \dim M$. 所以 $\dim M^\perp = \dim N^\perp$. 注意到 $M^\perp$ 和 $N^\perp$ 都自然得是欧氏空间, 而所有维数相同的欧氏空间都互同构. 取任意同构 $\psi\colon M^\perp \to N^\perp$. 取任意 $\{\, \alpha_i \,\}$ 中的极大线性无关组 $\alpha_{i_1}, \cdot \alpha_{i_r}$, 由 (a), 显然 $\beta_{i_1}, \cdots, \beta_{i_r}$ 是 N 的一组基. 用 $\varphi(\alpha_{i_j}) = \beta_{i_j}$, 定义 $\varphi\colon M \to N$. 易见 φ 保内积. 令 $\sigma := \varphi \oplus \psi$.(即 $\sigma(x+y) = \varphi(x) + \psi(y)$, 对任意 $x \in M, y \in M^\perp$). 显然 σ 即为一个满足条件的正交变换.

四、 [共 20 分] 假设 V 是 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间, $\mathbf{A} \in \mathrm{End}(V)$ 是 V 的一个自同态. 令

$$I_{\mathbf{A}} = \{ f \in \mathbb{C}[x] \mid f(\mathbf{A}) = 0 \}$$

为 $\mathbf{A}$ 的化零多项式组成的集合, $\varphi_{\mathbf{A}}$ 为 $\mathbf{A}$ 的最小多项式. 类似得, 对于任意 V 中的向量 α, 定义 α 在 $\mathbf{A}$ 的作用下的化零多项式的集合

$$I_{\mathbf{A},\alpha} = \{ f \in \mathbb{C}[x] \mid f(\mathbf{A})\alpha = 0 \}.$$

我们称 $I_{\mathbf{A},\alpha}$ 中次数最小的首项系数为 1 的多项式为 α(在 $\mathbf{A}$ 的作用下的) 的最小多项式, 记为 $\varphi_{\mathbf{A},\alpha}$. 证明如下关于化零多项式的命题:

(a) [5 分] 如果 $f \in I_{\mathbf{A}}$, 则 φ 整除 f, (即存在某个多项式 $p \in \mathbb{C}[x]$, 使得 $f(x) = \varphi(x)p(x)$).

(b) [5 分] 对于任意向量 $\alpha \in V$, 多项式 $\varphi_{\mathbf{A},\alpha}$ 整除 $\varphi_{\mathbf{A}}$.

(c) [10 分] 存在向量 $\xi \in V$ 使得 $\varphi_{\mathbf{A},\xi} = \varphi_{\mathbf{A}}$.

证明:

(a) 由带余除法, $f=\varphi q+r$, 其中 $\deg r<\deg\varphi$. 但是 $r(A)=f(A)-q(A)\varphi(A)=0$, 所以由极小多项式的定义, r 只能为零.

(b) 类似 (a) 小问, $\varphi_{A,\alpha}$ 整除任意 $f\in I_{A,\alpha}$. 特别的 (b) 成立, 因为 $\varphi_A\in I_{A,\alpha}$.

(c) 此题有两种证法:
1. 利用 Jordan 标准型: 在每个广义特征子空间中, 取其中任意一个向量 α_λ, 使得它生成的循环子空间的维数最大 (即 α_λ 生成的循环子空间对应一个有最大阶数的 Jordan 块). 则 $\alpha=\sum\alpha_\lambda$(其中 λ 跑遍 A 的所有不同特征值) 即为所求.
2. (如果把 $\mathbb{C}$ 换成任何元素个数大于 $\dim V$ 的域, 这个证明同样成立) 任取一个向量 α, 如果 $\varphi_{A,\alpha}\neq\varphi_A$, 令 M 为 $\varphi_{A,\alpha}(A)$ 的化零子空间. 取一个不在 M 中的向量 β. 考虑 $\varphi_{A,\alpha+c\beta}$ 让 c 在 $\mathbb{C}$ 中变动. $\{\varphi_{A,\alpha+c\beta}\mid c\in\mathbb{C}\}$ 是整除 φ_A 的无穷多个首项系数为 1 的多项式, 所以必有 $c_1\neq c_2$ 使得 $\varphi_{A,\alpha+c_1\beta}=\varphi_{A,\alpha+c_2\beta}=:f$. 因此: $f(A)\beta=\frac{1}{c_1-c_2}(f(A)(\alpha+c_1\beta)-f(A)(\alpha+c_2\beta))=0$. 另一方面, $f(A)\alpha=f(A)(\alpha+c_1\beta)-c_1f(A)\beta=0$. 所以 $\varphi_{A,\alpha}$ 整除 f. 总的来说, 我们构造出了向量, $\gamma:=\alpha+c_1\beta$, 使得 $\ker(\varphi_{A,\gamma})\supsetneq M+\operatorname{Span}\{\beta\}$. 因为 V 的维数有限, 我们可以递归得构造出向量 α, 使得 $\varphi_{A,\xi}(A)=0$. 由 (a) 和 (b), 我们得 φ_A 整除 $\varphi_{A,\xi}$ 且 $\varphi_{A,\xi}$ 整除 φ_A. 所以 $\varphi_{A,\xi}=\varphi_A$.

五、 [共 15 分] 假设 V 是 $\mathbb{C}$ 上的一个有限维的线性空间, $\{\mathbf{A}_j\in\operatorname{End}(V)\mid j\in J\}$ 是 V 上的一族可交换的线性变换. 证明: (可假设 $\{\mathbf{A}_j\}$ 是有限集)

(a) [5 分] 存在 $\{\mathbf{A}_j\}$ 的共同的特征向量, 即存在非零向量 α 和一族复数 $\{\lambda_j\in\mathbb{C}\mid j\in J\}$, 使得
$$\mathbf{A}_j\alpha=\lambda_j\alpha\qquad\text{对任意}\quad j\in J\quad\text{成立.}$$

(b) [10 分] 存在 V 中的一组基 ε, 使得在这组基下每个 $\mathbf{A}_j$ 都是上三角矩阵.

证明: 首先, 可假设 $\{\mathbf{A}_j\}$ 是有限集. 若不然, 取其中任意极大线性无关组, 易见如果命题对这组向量成立, 则对 $\{\mathbf{A}_j\}$ 也成立.

(a) 现假设 $\{\mathbf{A}_j\}$ 是有限的, 且 $J=\{1,2,\cdots,n\}$, 我们就 $\{\mathbf{A}_j\}$ 中的元素个数 n 作归纳法. 如果 $\{\mathbf{A}_j\}$ 中只有一个元素, 命题显然成立. 现在假设命题对个数小于 n 的可交换的线性变换组成立. 考虑 $\mathbf{A}_1$ 的任意特征值 λ 的特征子空间 V_λ, 则 V_λ 是 $\{\mathbf{A}_i\mid i=2,\cdots n\}$ 的共同不变子空间: 事实上, 如果 $\alpha\in V_\lambda$, 则 $A_1(A_i\alpha)=A_i(A_1\alpha)=\lambda(A_i\alpha)$, 即 $A_i\alpha\in V_\lambda$.
根据归纳假设, V_λ 中存在 $\{\mathbf{A}_i\mid i=2,\cdots n\}$ 的共同特征向量, 此向量显然也是 A_1 的特征向量, 即它是 $\{\mathbf{A}_i\mid i=1,\cdots n\}$ 的共同特征向量.

(b) 我们就 $\dim V$ 作归纳法.
如果 $\dim V=1$, 命题显然成立.
现假设命题对维数小于 n 的线性空间都成立.
取 V 中任意一个 $\{\mathbf{A}_j\}$ 的共同特征向量, 记为 ε_1. 考虑商空间 $Q=V/\operatorname{Span}\{\varepsilon_1\}$. 则 $\mathbf{A}_i$ 诱导出 Q 上的一族相互交换的线性变换, 记为 $\mathbf{B}_i$.
由归纳假设, Q 中存在一组基 $\{\overline{\varepsilon}_2,\cdots,\overline{\varepsilon}_n\}$. 使得 $\{\mathbf{B}_i\}$ 在这组基下成上三角矩阵 B_i. 取 V 中任意向量组 $\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$, 使得他们在 Q 中的像为 $\overline{\varepsilon}_i$. 则容易看出 $\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n$ 是 V 的一组基, 且 $\mathbf{A}_i$ 在这组基下的矩阵有如下形式 (其中 $*$ 位置为任意值)
$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & B_i\end{pmatrix}.$$

命题得证. □

六、 [共 25 分] 判断以下命题的对错, 如命题不成立请举出反例或陈述与之相关的正确命题. (每小题 5 分: 如果命题成立, 判断正确得 5 分; 如果命题不成立, 判断正确得 3 分, 给出反例或给出一个正确陈述再得 2 分.)

(a) 如果 V 是一个伪欧氏空间 (Pseudo-Euclidean space), 则题三(a)同样成立.

(b) 假设 $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ 是一个 n 维伪欧氏空间. 则 V 是欧氏空间当且仅当存在 V 中的一组基 $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n$ 使得 $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle \geq 0$ 对任意 $i, j \in \{1, \cdots n\}$ 成立.

(c) 对任意欧氏空间 (有限维或无穷维), 都存在一组标准正交基.

(d) 任意对称矩阵 A 都能写成某个对称矩阵的指数的形式 (即存在对称矩阵 B, 使得 $A = e^B$).

(e) 如果存在正整数 k 使得 n 阶实方阵 $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 满足 $A^k = E$, 则 A 在复数域上可对角化.

答案:

(a) 错. 在伪欧氏空间中存在长度为 0 的非零向量, 由这一个向量组成的向量组即为不满足命题的向量组.

(b) 错. 考虑度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的伪欧氏空间.

(c) 错. 在无穷维空间中命题一般不对. 考虑 $\ell^2 = \{ (a_1, a_2, \cdots) \mid \sum a_i^2 < \infty \}$. 这是一个希尔伯特空间 (Hilbert Space), 已知 ℓ^2 中的任意极大两两正交的非零向量组的集合是可数的. 但是 ℓ^2 的 (代数) 基是不可数的. 事实上容易验证, 对每个正实数, 序列 $a_{\lambda,i} = e^{-\lambda i}$ 在 ℓ^2 中, $\{ (a_{\lambda,1}, a_{\lambda,2}, \cdots) \mid \lambda \text{取遍正实数} \}$ 给出了 ℓ^2 中的一个不可数的线性无关向量集合. (只需指出一个正确的命题应该是: 有限维欧氏空间中必有正交基即可.)

(d) 错. 应改为对称正定矩阵. 事实上如果 B 是对称矩阵, e^B 的特征值都是正的.

(e) 对. A 的最小多项式整除 $x^k - 1$, 无重根.