上 海 交 通 大 学 试 卷 (A 卷)

(2016 至 2017 学年 第 2 学期)

班级号________________ 学号________________ 姓名 ___________

课程名称 高等代数与解析几何 *(二)* 成绩 ___________

记号

- 矩阵用大写字母记, 对应小写字母代表矩阵中的元素. 例如矩阵 A 中的第 (i,j) 个元素为 a_{ij}. A^T 和 A^* 分别代表矩阵 A 的转置和共轭转置. 可用 $\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$ 表示对角线上为 $d_1,\cdots,d_n$ 的对角矩阵.

- 向量一般理解为列向量, 用 X、Y 或 Z 等字母表示, 用对应的小写字母代表其分量. 例如向量 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T$.

一、 [15 分] 考虑 $n\times n$ 矩阵

$$J:=\begin{pmatrix}0 & 1 & & 0\\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0\end{pmatrix}$$

对正整数 k, 求 J^k 的若当标准型.

证明: 令 $\mathbf{e}_i$ 为第 i 个元素为 1 其他元素为 0 的列向量, 则 $\mathbf{e}_n$ 为 J 的循环向量. 对给定 k,

1. 若 $k\geq n$, 则 $J^k=0$.

2. 若 $0<k<n$, 设 $n=kl+r$, 其中 $0\leq l, 0\leq r<k$ 为整数. 显然

i. 对 $0\leq i<r, 0\leq t\leq l$, $(J^k)^t(\mathbf{e}_{n-i})=\mathbf{e}_{n-tk-i}$ 而 $(J^k)^{l+1}(\mathbf{e}_{n-i})=0$;

ii. 对 $r\leq i<n, 0\leq t<l$, $(J^k)^t(\mathbf{e}_{n-i})=\mathbf{e}_{n-tk-i}$ 而 $(J^k)^l(\mathbf{e}_{n-i})=0$.

所以 J^k 的若当标准型恰有 r 个大小为 $l+1$ 的幂零若当块和 $n-r$ 个大小为 l 的幂零若当块.

我承诺，我将
严格遵守考试纪律。

题号	一	二	三	四	五	六
得分						
批阅人 (流水阅)						

二、 [共 20 分] 令 $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 是一个半正定的对称矩阵证. 对任意正整数 k, 按如下步骤, 证明: 存在唯一的半正定对称矩阵 B 使得 $B^k = A$.

(a) [5 分] 设 $\{ \lambda_i \mid i = 1, \cdots, n \}$ 是 A 的所有特征值, 取任意多项式 $p(x)$ 使得 $p(\lambda_i) = \lambda_i^{1/k}$ 对任意 $i = 1, \cdots, n$ 成立 (例如, 可取 Lagrange 插值多项式). 令 $B := p(A)$, 则 $B^k = A$, 并且 $\mathrm{rk}(B) = \mathrm{rk}(A)$.

(b) [5 分] 若矩阵 C 满足 $C^k = A$, 则 $CB = BC$.

(c) [5 分] 进一步假设 C 是半正定对称矩阵, 则 $B = C$.

假设 G 是个可逆矩阵, 证明: (极分解 poler decomposition)

(d) [5 分] 存在唯一的正定对称阵 P 和正交矩阵 U 使得 $G = UP$.

证明:

(a) 取可逆矩阵 Q 使得 $A = Q^{-1}\Lambda Q$ 其中 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 显然 $B = p(A) = Q^{-1}\,\mathrm{diag}(p(\lambda_1), \cdots, p(\lambda_n))Q$. $B^k = Q^{-1}\,\mathrm{diag}(p(\lambda_1)^k, \cdots, p(\lambda_n)^k)Q = Q^{-1}\Lambda Q = A$. $\mathrm{rk}(A)$ 和 $\mathrm{rk}(B)$ 分别等于他们非零特征值的个数 (算上重数), 显然它们相等.

(b) 因为 $C^k = A$, $CB = Cp(A) = Cp(C^k) = p(C^k)C = p(A)C = BC$.

(c) 因为 C 是对称矩阵, 由 (b) 可知, 存在可逆矩阵 R 使得 B 和 C 可同时对角化. 设 $C = R^{-1}\,\mathrm{diag}(c_1, \cdots, c_n)R$, $B = R^{-1}\,\mathrm{diag}(b_1, \cdots, b_n)R$. 因为 B,C 都是半正定的, 所以 b_i,c_i 都是非负实数. 由 $C^k = A = B^k$ 可知, $b_i^k = c_i^k = \lambda_i$. 因此 $b_i = c_i$, 即 $B = C$.

(d) 由公式 $G = UP$ 可知 P 必须满足 $G^TG = P^TP$, 这里 G^TG 和 P 都是半正定对称矩阵. 所以由上题可知 P 存在唯一. 注意 $\mathrm{rk}(P) = \mathrm{rk}(G^TG) = \mathrm{rk}(G) = n$, 所以事实上 P 是可逆的. 令 $U = GP^{-1}$, 则 $U^TU = (P^{-1})^TG^TGP^{-1} = E$. 所以 U 是正交矩阵. U 的唯一性由 P 的唯一性可得. 命题得证.

三、 [14 分] 证明: 在复数域内多项式 $f(x) = x^n + ax^{n-m} + b$ 不能有不为 0 的重数大于 2 的根.

证明: 如果 $0 \neq \beta$ 是 $f(x)$ 的重数大于 2 的根, 则 β 是 $f'(x) = (nx^m + (n-m)a)x^{n-m-1}$ 的重数大于 1 的根. 如果 $a = 0$, 则 f' 只有 0 是它的根. 如果 $a \neq 0$, 取任意 α, 使得 $\alpha^m = -(n-m)a/n$, 则 $f(x)$ 的所有根为 0(重数为 $n-m-1$), 和 $\xi^k\alpha$(重数为 1), 其中 $k = 0, \cdots m-1$, $\xi = e^{2\pi i/m}$ 是 m-次单位根.

如果 $n = m$, 则多项式 $f(x) = x^n + b$, 它要么只有零是根, 要么没有重根.

总之, $f'(x)$ 没有重数大于 1 的非零根. 命题得证.

四、 [14 分] 设 m,n 是两个大于 1 的整数, 令 u 为 $\gcd(m,n)$ 的不同素因素的乘积 (若 $\gcd(m,n)=1$, 则令 $u=1$). 证明: (这里 φ 是 Euler 函数)

$$\frac{\varphi(mn)}{\varphi(m)\varphi(n)}=\frac{u}{\varphi(u)}=\frac{\gcd(m,n)}{\varphi(\gcd(m,n))}.$$

证明: 注意到 $\varphi(m)=m\prod_{p|m}(1-p^{-1})$, 这里乘积跑遍所有整除 m 的素数. 所以,

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(mn)}{\varphi(m)\varphi(n)}&=\frac{\prod_{p|mn}(1-p^{-1})}{\prod_{p|m}(1-p^{-1})\prod_{p|n}(1-p^{-1})}\\&=\frac{\prod_{p|m\text{或}p|n}(1-p^{-1})}{\prod_{p|m}(1-p^{-1})\prod_{p|n}(1-p^{-1})}\\&=\frac{1}{\prod_{p|m\text{且}p|n}(1-p^{-1})}\\&=\frac{1}{\prod_{p|\gcd(m,n)}(1-p^{-1})}\\&=\frac{u}{\varphi(u)}=\frac{\gcd(m,n)}{\varphi(\gcd(m,n))}\end{aligned}$$

五、 [共 12 分] 以下两题选做一题:

i) 设 A 是给定点, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 是三个不共面的向量, 记 A_t 为满足 $\overrightarrow{AA_t} = t\mathbf{w}$ 的点, l_t 为经过 A_t、平行于 $\mathbf{v} + t\mathbf{u}$ 的直线. 证明: 由单参数直线族 $\{ l_t \mid t \in \mathbb{R} \}$ 形成的图形是双曲抛物面.

ii) 考虑仿射空间 $\mathbb{R}^n$ 上的一个仿射变换 σ, 假设 ℓ 是 σ 的不变直线, 即集合 $\sigma(\ell) = \ell$. 证明:

(a) [4 分] 平行于 ℓ 的向量都是 σ 的特征向量, 并且特征值 λ 相同.

(b) [4 分] 当 λ 不等于 1 时, ℓ 上有 f 的一个不动点.

(c) [4 分] 如果 f 有不在 ℓ 上的不动点, 则存在过此点的一条直线, 它上面的每个点都是 f 的不动点.

i) 证明: 选取仿射标架 $[A; \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$, 于是 $A_t = (0,0,t)$, $\mathbf{v} + t\mathbf{u} = (t,1,0)$, 所以 l_t 上的点有坐标 $A_t + s(\mathbf{v} + t\mathbf{u}) = (st, s, t)$. 显然曲线族 l_t 给出的曲线族恰是方程 $x_1 = x_2x_3$ 确定的图形. 作坐标代换 $x_1 = z, x_2 = (x-y), x_3 = (x+y)$ 得方程 $x^2 - y^2 = z$. 因此形成的图形是一个双曲抛物面.

ii) 证明:

(a) 不妨设仿射变换为 $\sigma(X) = AX + B$, 其中 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), B \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. 令 $0 \neq \alpha$ 是平行于 l 的一个向量, 取 ℓ 上一点 P, 考虑点 Q 使得 $\overrightarrow{PQ} = \alpha$. 因为 $\sigma(P), \sigma(Q)$ 在直线 ℓ 上, 所以, 存在 λ 使得 $\overrightarrow{\sigma(P)\sigma(Q)} = A\alpha = \lambda\alpha$, 即 α 是 A 的特征向量.

(b) 固定 ℓ 上一点 P. 因为 $\sigma(P)$ 在 ℓ 上, $\overrightarrow{P\sigma(P)}$ 是平行于 α 的一个向量. 如果 $\lambda \neq 1$, 方程 $\sigma(P + t\alpha) = P + t\alpha$(等价于 $(\lambda - 1)t\alpha = t(A\alpha - \alpha) = -\overrightarrow{P\sigma(P)}$). 有解, 事实上可以看出 $t\alpha = -\frac{1}{\lambda-1}\overrightarrow{P\sigma(P)}$, 因此, $P - \frac{1}{\lambda-1}\overrightarrow{P\sigma(P)}$ 为所求不动点.

(c) 假设 Q 是 ℓ 外的一个不动点. 如果 $\lambda = 1$, 直线 $\ell' : Q + t\alpha$ 上的所有点都是不动点. 如果 $\lambda \neq 1$, ℓ 上有一个不动点, 设为 P. 于是过 P, Q 的直线 ℓ' 上的每一点都是 σ 的不动点 (事实上 ℓ' 上的点由坐标 $tP + (1-t)Q$, 显然 $\sigma(tP + (1-t)Q) = t\sigma(P) + (1-t)\sigma(Q) = tP + (1-t)Q$).

六、 [共 25 分] 判断以下命题的对错, 如命题不成立请举出反例或陈述与之相关的正确命题. (每小题 5 分: 如命题成立，判断正确得 5 分；如命题不成立, 判断正确得 3 分，给出反例或陈述正确命题再得 2 分.)

(a) 考虑系数在 $\mathbb{R}$ 中的多项式组成的集合 $\mathbb{R}[x]$, 则映射

$$\mu: \qquad \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) \longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{i+j+1} a_i b_j$$

给出了 $\mathbb{R}[x]$ 上的一个内积（即 μ 是一个正定对称的双线性函数）。

答案: 对. μ 显然是对称双线性的。事实上，对任意 $f, g \in \mathrm{R}[x]$, 我们有 $\mu(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$。所以 $\mu(f,f) \geq 0$. 若 $f(x) \neq 0$, 则 $f(x)$ 可以看作 $[0,1]$ 上的非零连续函数，此时 $\mu(f,f) > 0$.

(b) 假设 K 是一个至少包含两个元素的域, f 和 g 是 $K[x,y]$ 中互素的多项式 (即只有 $K^{\times}$ 中元素是 f 和 g 的公因子), 则存在 $u, v \in K[x,y]$ 使得 $uf + vg = 1$.

答案: 错. 考虑 $f = x$, $g = y$. 显然 f, g 互素. 但是, 不存在存在 u, v 使得 $uf + vg = 1$. 反证法, 假设存在, 多项式 $uf + vg$ 在 $x = 0, y = 0$ 时的取值为 0, 但是显然多项式 1 在此点取值为 1, 矛盾.

(c) 平面上任意四边形都有内切椭圆.

答案: 对. 见解析几何 (尤承业), 习题 4.4 题 12。这里四边形默认是凸四边形，若指出对凹四边形不存在内切椭圆也得分。

(d) 若 $A \in \mathrm{SO}(4)$, 即 A 是正交矩阵且满足 $\det(A) = 1$. 若 A 有一个非零不动点 (即存在 $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^4$, 使得 $A\alpha = \alpha$), 则 $\mathbb{R}^4$ 中有一个平面满足这个平面上的每一点都是 A 的不动点.

答案: 对. 用正变换的标准型. 特征值为 1 的子空间一定是偶数维.

(e) 考虑 3 维仿射空间中的一个二次曲面. 若它与某个平面的截线是一条双曲线, 则这个曲面一定是直纹面.

答案: 错. 双叶双曲面不满足. 除此之外, 于是这个曲面只可能是单页双曲面, 双曲抛物面, 双曲柱面和锥面.

总分 100 分

上 海 交 通 大 学 试 卷(B 卷)

(2016 至 2017 学年　第 2 学期)

班级号________________ 学号________________ 姓名 __________

课程名称　　　高等代数与解析几何 *(二)*　　　　成绩 __________

记号

- 矩阵用大写字母记, 对应小写字母代表矩阵中的元素. 例如矩阵 A 中的第 (i,j) 个元素为 a_{ij}. A^T 和 A^* 分别代表矩阵 A 的转置和共轭转置. 可用 $\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$ 表示对角线上为 $d_1,\cdots,d_n$ 的对角矩阵.

- 向量一般理解为列向量, 用 X、Y 或 Z 等字母表示, 用对应的小写字母代表其分量. 例如向量 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T$.

一、　[14 分] 证明: 在复数域内多项式 $f(x)=x^n+ax^{n-m}+b$ 不能有不为 0 的重数大于 2 的根.

证明: 如果 $0\neq\beta$ 是 $f(x)$ 的重数大于 2 的根, 则 β 是 $f'(x)=(nx^m+(n-m)a)x^{n-m-1}$ 的重数大于 1 的根. 如果 $a=0$, 则 f' 只有 0 是它的根. 如果 $a\neq 0$, 取任意 α, 使得 $\alpha^m=-(n-m)a/n$, 则 $f(x)$ 的所有根为 0(重数为 $n-m-1$), 和 $\xi^k\alpha$(重数为 1), 其中 $k=0,\cdots m-1$, $\xi=e^{2\pi i/m}$ 是 m-次单位根.

如果 $n=m$, 则多项式 $f(x)=x^n+b$, 它要么只有零是根, 要么没有重根.

总之, $f'(x)$ 没有重数大于 1 的非零根. 命题得证.

我承诺，我将
严格遵守考试纪律。

题号	一	二	三	四	五	六
得分						
批阅人 (流水阅)						

二、 [14 分] 设 m, n 是两个大于 1 的整数, 令 u 为 $\gcd(m,n)$ 的不同素因素的乘积 (若 $\gcd(m,n)=1$, 则令 $u=1$). 证明: (这里 φ 是 Euler 函数)

$$\frac{\varphi(mn)}{\varphi(m)\varphi(n)}=\frac{u}{\varphi(u)}=\frac{\gcd(m,n)}{\varphi(\gcd(m,n))}.$$

证明: 注意到 $\varphi(m)=m\prod_{p|m}(1-p^{-1})$, 这里乘积跑遍所有整除 m 的素数. 所以,

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(mn)}{\varphi(m)\varphi(n)}&=\frac{\prod_{p|mn}(1-p^{-1})}{\prod_{p|m}(1-p^{-1})\prod_{p|n}(1-p^{-1})}\\
&=\frac{\prod_{p|m\text{或}p|n}(1-p^{-1})}{\prod_{p|m}(1-p^{-1})\prod_{p|n}(1-p^{-1})}\\
&=\frac{1}{\prod_{p|m\text{且}p|n}(1-p^{-1})}\\
&=\frac{1}{\prod_{p|\gcd(m,n)}(1-p^{-1})}\\
&=\frac{u}{\varphi(u)}=\frac{\gcd(m,n)}{\varphi(\gcd(m,n))}
\end{aligned}$$

三、 [15 分] 考虑 $n \times n$ 矩阵

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

对正整数 k, 求 J^k 的若当标准型.

证明: 令 $\mathbf{e}_i$ 为第 i 个元素为 1 其他元素为 0 的列向量, 则 $\mathbf{e}_n$ 为 J 的循环向量. 对给定 k,

1. 若 $k \geq n$, 则 $J^k = 0$.

2. 若 $0 < k < n$, 设 $n = kl + r$, 其中 $0 \leq l, 0 \leq r < k$ 为整数. 显然

i. 对 $0 \leq i < r, 0 \leq t \leq l$, $(J^k)^t(\mathbf{e}_{n-i}) = \mathbf{e}_{n-tk-i}$ 而 $(J^k)^{l+1}(\mathbf{e}_{n-i}) = 0$;

ii. 对 $r \leq i < n, 0 \leq t < l$, $(J^k)^t(\mathbf{e}_{n-i}) = \mathbf{e}_{n-tk-i}$ 而 $(J^k)^l(\mathbf{e}_{n-i}) = 0$.

所以 J^k 的若当标准型恰有 r 个大小为 $l+1$ 的幂零若当块和 $n-r$ 个大小为 l 的幂零若当块.

四、 [共 20 分] 令 $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 是一个半正定的对称矩阵证. 对任意正整数 k, 按如下步骤, 证明: 存在唯一的半正定对称矩阵 B 使得 $B^k = A$.

(a) [5 分] 设 $\{\lambda_i \mid i = 1, \cdots, n\}$ 是 A 的所有特征值, 取任意多项式 $p(x)$ 使得 $p(\lambda_i) = \lambda_i^{1/k}$ 对任意 $i = 1, \cdots, n$ 成立 (例如, 可取 Lagrange 插值多项式). 令 $B := p(A)$, 则 $B^k = A$, 并且 $\mathrm{rk}(B) = \mathrm{rk}(A)$.

(b) [5 分] 若矩阵 C 满足 $C^k = A$, 则 $CB = BC$.

(c) [5 分] 进一步假设 C 是半正定对称矩阵, 则 $B = C$.

假设 G 是个可逆矩阵, 证明: (极分解 poler decomposition)

(d) [5 分] 存在唯一的正定对称阵 P 和正交矩阵 U 使得 $G = UP$.

证明:

(a) 取可逆矩阵 Q 使得 $A = Q^{-1}\Lambda Q$ 其中 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 显然 $B = p(A) = Q^{-1}\,\mathrm{diag}(p(\lambda_1), \cdots, p(\lambda_n))Q$. $B^k = Q^{-1}\,\mathrm{diag}(p(\lambda_1)^k, \cdots, p(\lambda_n)^k)Q = Q^{-1}\Lambda Q = A$. $\mathrm{rk}(A)$ 和 $\mathrm{rk}(B)$ 分别等于他们非零特征值的个数 (算上重数), 显然它们相等.

(b) 因为 $C^k = A$, $CB = Cp(A) = Cp(C^k) = p(C^k)C = p(A)C = BC$.

(c) 因为 C 是对称矩阵, 由 (b) 可知, 存在可逆矩阵 R 使得 B 和 C 可同时对角化. 设 $C = R^{-1}\,\mathrm{diag}(c_1, \cdots, c_n)R$, $B = R^{-1}\,\mathrm{diag}(b_1, \cdots, b_n)R$. 因为 B,C 都是半正定的, 所以 b_i,c_i 都是非负实数. 由 $C^k = A = B^k$ 可知, $b_i^k = c_i^k = \lambda_i$. 因此 $b_i = c_i$, 即 $B = C$.

(d) 由公式 $G = UP$ 可知 P 必须满足 $G^TG = P^TP$, 这里 G^TG 和 P 都是半正定对称矩阵. 所以由上题可知 P 存在唯一. 注意 $\mathrm{rk}(P) = \mathrm{rk}(G^TG) = \mathrm{rk}(G) = n$, 所以事实上 P 是可逆的. 令 $U = GP^{-1}$, 则 $U^TU = (P^{-1})^TG^TGP^{-1} = E$. 所以 U 是正交矩阵. U 的唯一性由 P 的唯一性可得. 命题得证.

五、 [共 12 分] 以下两题选做一题:

i) 设 A 是给定点, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 是三个不共面的向量, 记 A_t 为满足 $\overrightarrow{AA_t} = t\mathbf{w}$ 的点, l_t 为经过 A_t、平行于 $\mathbf{v} + t\mathbf{u}$ 的直线. 证明: 由单参数直线族 $\{\, l_t \mid t \in \mathbb{R} \,\}$ 形成的图形是双曲抛物面.

ii) 考虑仿射空间 $\mathbb{R}^n$ 上的一个仿射变换 σ, 假设 ℓ 是 σ 的不变直线, 即集合 $\sigma(\ell) = \ell$. 证明:

(a) [4 分] 平行于 ℓ 的向量都是 σ 的特征向量, 并且特征值 λ 相同.

(b) [4 分] 当 λ 不等于 1 时, ℓ 上有 f 的一个不动点.

(c) [4 分] 如果 f 有不在 ℓ 上的不动点, 则存在过此点的一条直线, 它上面的每个点都是 f 的不动点.

i) 证明: 选取仿射标架 $[A; \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$, 于是 $A_t = (0, 0, t)$, $\mathbf{v} + t\mathbf{u} = (t, 1, 0)$, 所以 l_t 上的点有坐标 $A_t + s(\mathbf{v} + t\mathbf{u}) = (st, s, t)$. 显然曲线族 l_t 给出的曲线族恰是方程 $x_1 = x_2x_3$ 确定的图形. 作坐标代换 $x_1 = z, x_2 = (x - y), x_3 = (x + y)$ 得方程 $x^2 - y^2 = z$. 因此形成的图形是一个双曲抛物面.

ii) 证明:

(a) 不妨设仿射变换为 $\sigma(X) = AX + B$, 其中 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), B \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. 令 $0 \neq \alpha$ 是平行于 l 的一个向量, 取 ℓ 上一点 P, 考虑点 Q 使得 $\overrightarrow{PQ} = \alpha$. 因为 $\sigma(P), \sigma(Q)$ 在直线 ℓ 上, 所以, 存在 λ 使得 $\overrightarrow{\sigma(P)\sigma(Q)} = A\alpha = \lambda\alpha$, 即 α 是 A 的特征向量.

(b) 固定 ℓ 上一点 P. 因为 $\sigma(P)$ 在 ℓ 上, $\overrightarrow{P\sigma(P)}$ 是平行于 α 的一个向量. 如果 $\lambda \neq 1$, 方程 $\sigma(P + t\alpha) = P + t\alpha$(等价于 $(\lambda - 1)t\alpha = t(A\alpha - \alpha) = -\overrightarrow{P\sigma(P)}$). 有解, 事实上可以看出 $t\alpha = -\frac{1}{\lambda - 1}\overrightarrow{P\sigma(P)}$, 因此, $P - \frac{1}{\lambda - 1}\overrightarrow{P\sigma(P)}$ 为所求不动点.

(c) 假设 Q 是 ℓ 外的一个不动点. 如果 $\lambda = 1$, 直线 $\ell' : Q + t\alpha$ 上的所有点都是不动点. 如果 $\lambda \neq 1$, ℓ 上有一个不动点, 设为 P. 于是过 P, Q 的直线 ℓ' 上的每一点都是 σ 的不动点 (事实上 ℓ' 上的点由坐标 $tP + (1 - t)Q$, 显然 $\sigma(tP + (1 - t)Q) = t\sigma(P) + (1 - t)\sigma(Q) = tP + (1 - t)Q$).

六、 [共 25 分] 判断以下命题的对错, 如命题不成立请举出反例或陈述与之相关的正确命题. (每小题 5 分: 如命题成立，判断正确得 5 分；如命题不成立, 判断正确得 3 分，给出反例或陈述正确命题再得 2 分.)

(a) 假设 K 是一个至少包含两个元素的域, f 和 g 是 $K[x,y]$ 中互素的多项式 (即只有 $K^{\times}$ 中元素是 f 和 g 的公因子), 则存在 $u,v\in K[x,y]$ 使得 $uf+vg=1$.

答案: 错. 考虑 $f=x, g=y$. 显然 f,g 互素. 但是, 不存在存在 u,v 使得 $uf+vg=1$. 反证法, 假设存在, 多项式 $uf+vg$ 在 $x=0,y=0$ 时的取值为 0, 但是显然多项式 1 在此点取值为 1, 矛盾.

(b) 若 $A\in \mathrm{SO}(4)$, 即 A 是正交矩阵且满足 $\det(A)=1$. 若 A 有一个非零不动点 (即存在 $0\neq\alpha\in\mathbb{R}^4$, 使得 $A\alpha=\alpha$), 则 $\mathbb{R}^4$ 中有一个平面满足这个平面上的每一点都是 A 的不动点.

答案: 对. 用正变换的标准型. 特征值为 1 的子空间一定是偶数维.

(c) 考虑 3 维仿射空间中的一个连通的二次曲面 (即曲面上的任意两点存在曲面中的一条曲线连接它们). 若它与某个平面的截线是一条双曲线, 则这个曲面一定是直纹面.

答案: 对. 注意这时候双叶双曲面被排除在外了, 于是这个曲面只可能是单页双曲面, 双曲抛物面和锥面.

(d) 平面上任意四边形都有内切椭圆.

答案: 对. 见解析几何 (尤承业), 习题 4.4 题 12。这里四边形默认是凸四边形，若指出对凹四边形不存在内切椭圆也得分。

(e) 考虑系数在 $\mathbb{R}$ 中的多项式组成的集合 $\mathbb{R}[x]$, 则映射

$$\mu:\quad \mathbb{R}[x]\times\mathbb{R}[x]\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i, \sum_{j=0}^{\infty}b_jx^j\right)\longmapsto\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{i+j+1}a_ib_j$$

给出了 $\mathbb{R}[x]$ 上的一个内积（即 μ 是一个正定对称的双线性函数）。

答案: 对. μ 显然是对称双线性的。事实上，对任意 $f,g\in\mathrm{R}[x]$, 我们有 $\mu(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$。所以 $\mu(f,f)\geq 0$. 若 $f(x)\neq 0$, 则 $f(x)$ 可以看作 $[0,1]$ 上的非零连续函数，此时 $\mu(f,f)>0$.

总分 100 分